Уважаемые студенты!!!
Запишите конспекты данных лекций !!!
03.11.2020 я вас жду со всеми лекциями , практическими, контрольными работами которые я вам задавала на период дистанционного обучения.
03.11 у нас с вами урок, мы будем писать 6-ю практическую работу!!!
До встречи !))

План проведения лекционного занятия № 33-35

Дата 27.10
Группа21,22
Тема лекции: **Классическое определение вероятности. Теоремы о вероятностях.**
Тип лекции: вводная, обзорная
Вид лекции: информационная
Дидактические цели: сообщение новых знаний;
Методы обучения: информационно – развивающие
Приемы обучения: приемы обучения конспектированию)
ТСО и наглядные пособия: доска

Ход занятия

1.Организационный момент.
2.Мотивационная установка.
3.Сообщение учащимся плана лекции, ознакомление их с темой, целью, задачами лекции.
Тема лекции: Классическое определение вероятности. Теоремы о вероятностях.
Цели и задачи : познакомить с классическим определением вероятности; с абсолютной частотой случайного события; с относительной частотой случайного события; с теоремами о вероятностях; формирование у студентов первичных умений и навыков применять теоретический материал для решения задач.
План лекции:
1.Вероятность события.
2. Вероятность как предельное значение частоты.
3.Классическое определение вероятности.
4.Теоремы о вероятностях.

4.Тезисное конспектирование.

Вероятность события

В применении к случайным явлениям в нашем сознании возникает представление о вероятности явления. Незнание точного смысла слова «вероятность», не мешает использовать его в речи, сравнивать вероятности событий и т.д.

Например, употребляя выражения «стопроцентная вероятность» и «вероятность равна нулю», подчеркивают уверенность в том, что событие произойдет или не произойдет. Использование термина «вероятность» и различных оборотов с ним основывается на жизненном опыте, интуитивном представлении о вероятности(возможности) наступления того или иного события.

Как же математически выразить вероятность исходя из интуитивного понимания этого термина? То есть необходимо численно выразить эту меру правдоподобия события.

Для определения вероятности используются два подхода.

Вероятность как предельное значение частоты

Очевидно, что самые правдоподобные события- достоверные, так как их мера(вероятность) должна быть максимальной.

Самые неправдоподобные события- невозможные. Их вероятность должна быть минимальной.

Оказалось , что степень достоверности случайных событий удобно измерять числами из отрезка [0;1]. Тогда достоверным событиям соответствует вероятность 1(максимально возможная), а невозможным событиям -0.

Все остальные числа из промежутка (0;1)- это вероятности случайных событий и их нужно каким то образом уметь находить.

Интуитивно мы понимаем, что событие является более вероятным, если оно происходит часто, менее вероятным- если редко. Поэтому нужно связать вероятность с частотой.

Абсолютной частотой случайного события А в серии из N испытаний называется число N_A , которое показывает, сколько раз в этой серии произошло событие А.

Так как абсолютная частота- это количество появлений события А, то она всегда выражается целым числом $0 \leq N_A \leq N$. Причем абсолютная частота невозможного события равна 0, а достоверного-N.

Очевидно, что абсолютная частота не может дать необходимого представления о вероятности события. Действительно, бросим кубик 10 раз и запишем, сколько раз выпала 1. Допустим , что1 выпала все 10 раз. Отсюда будет следовать, что выпадение 1 при броске кубика- событие достоверное, а как мы знаем из практики- это не так.

Очевидно, что нужно как то связать абсолютную частоту события N_A и количество проведенных испытаний N.

Относительной частотой случайного события А в серии из N испытаний называется число F(A) , которое показывает, какая доля опытов в серии завершилась наступлением события А;

$$F(A)=\frac{N_A}{N} .$$

Относительная частота(часто говорят просто частота) выражается числом от 0 до 1. При этом для достоверного события F(A)=1, а для невозможного – F(A)=0.

Исходя из требований к числовому определению вероятности и определения относительной частоты, можно решить, что относительную частоту и нужно принять за вероятность события. К сожалению, в силу случайности событий, при одних и тех же испытаниях, проведенных одинаковое количество раз, относительная частота принимает различные значения.

Например, даже в самом простом случае при броске монеты сериями по 100 раз, относительная частота выпадения орла будет принимать различные результаты. Например:

0,49	0,49	0,53	0,41	0,51	0,51	0,57	0,46	0,43	0,5
0,51	0,58	0,51	0,47	0,47	0,51	0,51	0,48	0,56	0,48

Из полученных результатов видно, что хотя частота и различается, она колеблется около некоторого конкретного числа, в данном случае-0,5(это легко проверить, увеличив количество испытаний). Причем, чем больше опытов мы проводим, тем более частота приближается к определенному числу, которое и следует считать вероятностью. Максимально точно найти это число возможно только при бесконечном числе экспериментов.

С похожими формулировками задачи мы уже сталкивались при изучении пределов, поэтому можно сказать, что **вероятность случайного события** А-это предельное значение частоты в бесконечной серии экспериментов.

Данное определение называют «статистическим определением вероятности».

Классическое определение вероятности

Как было показано, статистическое определение вероятности позволяет «оценить» вероятность события, но только в том случае, если испытания действительно производились и есть зафиксированные данные каждого испытания.

Но в ряде случаев проведение реальных экспериментов даже в единичных случаях представляет собой проблему(сложно, дорого, опасно), поэтому необходим другой подход к измерению вероятности события без практических испытаний.

Рассмотрим испытание. Оно заканчивается некоторым множеством исходов N. Из множества всех исходов N нас интересует подмножество M заранее определенных исходов, благоприятствующих событию А.

В этом случае **вероятностью случайного события** А назовем отношение числа M благоприятных исходов к общему числу исходов N, образующих полную группу событий, т.е.;

$$P(A)=\frac{M}{N}.$$

Данное определение носит название «классическое определение вероятности».

Так в испытании с броском монетки есть только 2 исхода- выпадение орла и выпадение решки. При этом для события «выпал орел» благоприятным является только 1 из них. Следовательно, вероятность выпадения орла равна $\frac{1}{2}$ =0,5. Такой же результат был получен и при статистическом подходе.

В данном случае классический подход позволил получить результат точнее и, главное, быстрее. Но при сложных событиях иногда бывает затруднительно определить множество исходов таким образом, чтобы они образовывали полную группу, или представить все взаимосвязи между событиями.

Поэтому подход к определению вероятности следует выбирать исходя из практической задачи.

Теоремы о вероятностях

Как уже говорилось, элементарные события могут влиять друг на друга и образовывать сложные события. Если нахождение вероятности элементарного события является несложной задачей, то нахождение вероятности сложного события требует дополнительных усилий.

В зависимости от вида случайных событий и вида взаимосвязи между событиями применяются различные теоремы, позволяющие найти вероятность сложного события.

Теоремы сложения вероятностей

1.Если события *несовместные,* вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$P=(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

2. Если два события *совместные,* то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей минус вероятность их совместного наступления: $P(A+B)=P(A)+P(B)- P(AB)$.

3.Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$P(A)+P(\bar{A})=1$.

Пример

Из слова «поликлиника» случайным образом выбирается одна буква.

Какова вероятность того, что эта буква гласная?

Какова вероятность того, что эта буква «к»?

Какова вероятность того, что эта буква гласная или «к»?

Обозначим события:

А- выбрана гласная буква

В- выбрана буква «к»

А+В- выбрана гласная буква или «к»

Всего имеется 11 равновозможных исходов-N.

Количество исходов, благоприятных для события А-5. Для события В- 2.

$P(A)=\frac{5}{11}$, $P(B)=\frac{2}{11}$.

Так как события А и В несовместные(«к» - не гласная), то

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{11}+\frac{2}{11}$.

Теорема умножения вероятностей

Как видно из определения, для того чтобы произошло событие, полученное произведением, должны произойти все события, входящие в его состав.

При этом , входящие события могут влиять друг на друга (менять вероятность других), а могут и быть независимыми(не менять вероятность других).

Условной вероятностью события А по отношению к событию В называется вероятность события А, найденная в предположении, что событие В уже произошло. Обозначается Р(А/В).

Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

1. Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них, на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется при условии, что все предыдущие события наступили.
   $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$.
2. Вероятность совместного наступления нескольких независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример

В корзине имеется два белых и три черных шара. Найти вероятность того, что один за другим будут вынуты все черные шары.

Обозначим:

А – вынуты все черные шары;

A_1 – черный шар вынут в первый раз;

A_2 – черный шар вынут во второй раз;

A_3 – черный шар вынут в третий раз.

Так как для наступления события А необходимо, чтобы наступили все события A_1, A_2, A_3, то $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Чтобы узнать, меняет ли наступление одного из событий вероятности наступление другого, нужно представить себе процесс испытания. В данном случае мы вытаскиваем шар из корзины, смотрим его цвет и откладываем в сторону, потом лезем в корзину в следующий раз. После того, как мы вынули один шар из корзины, количество шаров в ней уменьшилось, а если был выбран черный шар, то уменьшается и количество черных шаров в корзине.

Таким образом, наступление одного события, меняет условия проведения испытания и , следовательно, вероятность наступления последующих событий.

Поэтому для нахождения вероятности А будет использоваться следующая формула:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)$.

Найдем значения всех входящих в нее вероятностей:

$P(A_1) = 3/5$- всего 5 шаров, 3 черных.

$P(A_2/A_1) = 2/4 = 1/2$- всего 4 шара, 2 черных(предполагаем, что 1 черный шар вынули).

$P(A_3/A_1A_2) = 1/3$- всего 3 шара, 1 черный(предполагаем, что уже вынуты 2 черных шара).

Подставляем найденные значения в формулу:

P(A)=$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$.

5.Подведение итогов: Комментарий ответов

Домашнее задание. Знать основные понятия, читать конспект урока

Преподаватель______________

План проведения лекционного занятия № 36-37

Дата 29.10

Группа21,22

Тема лекции: **Формула полной вероятности. Случайные величины.**

Тип лекции: вводная, обзорная

Вид лекции: информационная

Дидактические цели: сообщение новых знаний;

Методы обучения: информационно – развивающие

Приемы обучения: приемы обучения конспектированию)

ТСО и наглядные пособия: доска

Ход занятия

1.Организационный момент.

2.Мотивационная установка.

3.Сообщение учащимся плана лекции, ознакомление их с темой, целью, задачами лекции.

Тема лекции: Формула полной вероятности. Случайные величины.

Цели и задачи : познакомить с формулой полной вероятности, случайными величинами; с характеристикой случайных величин; с математическим ожиданием случайных величин; с дисперсией и средним квадратичным отклонением случайной величины; формирование у студентов первичных умений и навыков применять теоретический материал для решения задач.

План лекции:

1. Формула полной вероятности.
2. Случайные величины. Характеристика случайных величин.
3. Математическое ожидание случайной величины.
4. Дисперсия случайной величины.
5. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.

4.Тезисное конспектирование.

Пусть событие А может наступить с одним и только с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу (такие события называются **гипотезами**). Тогда вероятность события А вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A),$$

которая носит название **формулы полной вероятности.**

Вероятности гипотез $P(H_i)$ в этой формуле предполагаются известными до опыта.

Пример. Издательство разослало рекламные материалы на новый учебник по теории вероятностей, которые получили 80% профессоров, читающих этот курс в различных учебных заведениях. Отобрали эту книгу и приняли ее для преподавания 30% профессоров, получивших рекламные материалы и 10% не получивших их. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный профессор вуза принял этот учебник для преподавания?

Решение. Пусть А – событие, что учебник одобрен и принят к преподаванию. Гипотеза H_1 – профессор получил рекламные материалы, гипотеза H_2 – профессор не получил рекламные материалы.

$P(H_1)=0{,}8$, $P_{H1}(A)=0{,}3$

$P(H_2)=0{,}2$, $P_{H2}(A)=0{,}1$.

$P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}24 + 0{,}02 = 0{,}26$.

Теорема.(О полной вероятности)

Вероятность события А, которое может наступить, если наступит одно из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события А.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$ - формула полной вероятности.

Формула Бейеса

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, вероятности каждого из которых до проведения опыта имели определенные значения.

Предположим, что в результате опыта наступило событие A. Наступление этого события может повлечь за собой изменение первоначальных вероятностей гипотез H_i. Поставим задачу отыскания вероятности $P(H_i/A)$. Из теоремы умножения имеем:

$$P(H_i A)=P(H_i)P(A/H_i)=P(A)P(H_i/A).$$

Откуда находим

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

или записывая P(A) по формуле полной вероятности, получим

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P(A/H_j)}$$ - формула Бейеса.

Пример. Пусть в условии предыдущего примера взятая в О.Т.К. деталь оказалась бракованной. Какова вероятность, что она изготовлена на первом конвейере?

<u>Решение:</u> Воспользуемся формулой Бейеса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{(1/3)\cdot 0{,}02}{0{,}08/3}=\frac{1}{4}.$$

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,4. После стрельбы обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что она принадлежит первому стрелку.

<u>Решение:</u> Пусть событие А – в мишени одна пробоина.

Событие B_1 – в мишень попал 1-й стрелок, событие B_2 – в мишень попал 2-й стрелок. Рассмотрим различные предположения:

$H_1=\overline{B}_1\overline{B}_2$ - в мишень не попал ни первый, ни второй стрелок,

$H_2=B_1B_2$ - оба стрелка попали в мишень,

$H_3=B_1\overline{B}_2$ - попал только первый стрелок,

$H_4=\overline{B}_1B_2$ - попал только второй стрелок.

$P(H_1)=P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12$, $P(A/H_1)=0$,

$P(H_2)=P(B_1)P(B_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32$, $P(A/H_1)=0$,

$P(H_3)=P(B_1)P(\overline{B}_2)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48$, $P(A/H_1)=1$,

$P(H_4)=P(\overline{B}_1)P(B_2)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$, $P(A/H_1)=1$.

Искомая вероятность равна

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(H_3)P(A/H_3)+P(H_4)P(A/H_4)}=\frac{0,48\cdot 1}{0,48+0,08}=\frac{6}{7}.$$

Понятие случайной величины

Случайная величина – это величина, значения которой зависят от случая. Например, вес пойманной рыбы, температура воздуха в течение суток, сумма выигрыша лотерейного билета и т. п.

Случайная величина обозначается буквами X, Y, Z и т. д.

Виды случайных величин:

1) *дискретная* CBX – принимает конечное или счетное множество значений;

2) *непрерывная* CBX – принимает все значения из заданного промежутка.

Говорят, что задан ***закон распределения*** случайной величины X, если каждому значению x поставлена в соответствие вероятность его появления и сумма всех вероятностей равна числу 1.

Закон распределения CBX может быть задан аналитически (формулой) или таблицей.

Приведем табличный закон распределения дискретной CBX:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	$\dots$	p_n

Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание CBX – это среднее значение величины X или центр ее распределения.

Математическое ожидание дискретной CBX, находят по формуле:

$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, где $i=\overline{1,n}$.

Математическое ожидание непрерывной CBX с плотностью распределения $p(x)$, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha,\beta]$, находят по формуле:

$$M(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xp(x)dx.$$

а ели все значения CBX принадлежат промежутку $(-\infty;+\infty)$, то по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$

при условии, что интеграл сходится.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание CBX заключено между ее наибольшим и наименьшим значениями.
2. $M(c) = c$, где c – константа.
3. $M(kX) = kM(X)$, где k – постоянный множитель.
4. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
5. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если случайные величины X и Y независимые.

Дисперсия или рассеивание CBX – это математическое ожидание квадрата отклонения величины X от ее математического ожидания:
$D(X) = M(X - M(X))^2$,

Дисперсию *дискретной* CBX можно найти по формуле:
$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$, где
$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$, где $i = \overline{1, n}$.

Дисперсию *непрерывной* CBX с плотностью распределения $p(x)$, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, находят по формуле
$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 p(x)dx - (M(X))^2$,
а ели все значения CBX принадлежат промежутку $(-\infty; +\infty)$, то по формуле
$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M(X))^2$,
при условии, что интеграл сходится.

Свойства дисперсии
1. $D(c) = 0$, где c – константа.
2. $D(kX) = k^2 D(X)$, где k – постоянный множитель.
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если случайные величины X и Y независимые.
4. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$, если случайные величины X и Y независимые.

Среднее квадратичное отклонение CBX – корень квадратный из ее дисперсии:
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример

Случайная величина задана таблицей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,3	0,25	0,1	0,15

M(X)=$1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}15 = 2{,}7$; D(X)=$(1-2{,}7)^2 \cdot 0{,}2 + (2 - 2{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + (3-2{,}7)^2 \cdot 0{,}25 + (4-2{,}7)^2 \cdot 0{,}1 + (5-2{,}7)^2 \cdot 0{,}15 = 1{,}71$.
$\sigma = \sqrt{1{,}71} \approx 1{,}308$.

5.**Подведение итогов**: Комментарий ответов

Домашнее задание. Знать основные понятия, читать конспект урока

Преподаватель ________________